

Conjectures de Weil et cohomologies de Weil

Jérôme Plût

GTBAC 28 avril 2013

1 Rappels sur les conjectures de Weil

1.1 Introduction

Soit $X/\mathbb{F}_q$ une variété projective. La fonction zêta de X est

$$Z(X, t) = \exp \left(\sum_{m \geq 0} |X(\mathbb{F}_{q^m})| \frac{t^m}{m} \right).$$

Conjectures de Weil (cf. exposé de Ben Smith) :

(W1) Rationalité : $Z(X, t) \in \mathbb{Q}(t)$ (même un peu plus précis : degrés bornés...).

(W2) Équation fonctionnelle/dualité de Poincaré reliant $Z(X, t)$ à $Z(X, \frac{1}{q^{\dim X} t})$.

(W3) Conjecture de Riemann : modules des racines et pôles de $Z(X, t)$.

Sur les courbes : preuve directe par Weil utilisant des diviseurs + intersections...

Sur des variétés plus générales : plus compliqué. Principe (adapté depuis les courbes) : on considère $\varphi =$ le Frobenius / $\mathbb{F}_q$, alors

$$N_m = |X(\mathbb{F}_{q^m})| = |\text{points fixes de } \varphi^m|X(\overline{\mathbb{F}_q})| = \left| \text{graphe}(\varphi^m)_{X \times X} \text{ diag} \right|.$$

Définition : une *cohomologie de Weil* est un foncteur contravariant H^* depuis une certaine catégorie de variétés algébriques vers des algèbres graduées sur un anneau A , satisfaisant :

(C0) $H^*(X)$ est concentré en degrés $\llbracket 0, 2 \dim X \rrbracket$;

(C1) (Künneth) $H^*(X \times Y) = H^*(X) \otimes_K H^*(Y)$;

(C2) $H^2(\mathbb{P}^1) \approx K$ (et on note $V(-1) = V \otimes_K H^2(\mathbb{P}^1)$) ;

(C3) $H^{2 \dim X}(X) = K(-\dim X)$;

(C4) (Dualité de Poincaré) $H^i(X) \otimes H^{2 \dim X - i}(X) \rightarrow H^{2 \dim X}(X)$ est un accouplement parfait ;

(C5) (Classe) Il existe cl_X^r associant à une sous-variété de dimension r un élément de $H^{2r}(X)(-r)$ compatible au reste...

Ceci implique la *formule des traces de Lefschetz* :

$$N_m = \sum_{i=0}^{2 \dim X} (-1)^i \text{Tr}(\varphi^m | H^i(X))$$

Soit φ un endomorphisme d'un K -espace vectoriel : notons alors $\det(1 - t\varphi) = \prod (1 - \lambda_i t)$, alors $\text{Tr } \varphi^m = \sum \lambda_i^m$ et donc

$$\log \det(1 - t\varphi) = \sum \log(1 - \lambda_i t) = - \sum_{m \geq 1} \lambda_i \frac{t^m}{m} = - \sum_{m \geq 1} \text{Tr } \varphi^m \frac{t^m}{m}.$$

On trouve donc l'expression pour la fonction zêta :

$$\begin{aligned} Z(X, t) &= \exp \sum_m (-1)^i \frac{t^m}{m} \text{Tr}(\varphi^m | H^i(X)) &&= \exp \sum_m (-1)^{i+1} \det(1 - t\varphi | H^i(X)) \\ &= \frac{P_1(t) \dots P_{2n-1}(t)}{P_0(t) \dots P_{2n}(t)}, && P_i(t) = \det(1 - t\varphi | H^i(X)). \end{aligned}$$

1.2 Exemples de cohomologies de Weil

Cohomologie singulière (sur $\mathbb{C}$) Marche, mais pénible à calculer (topologique) et seulement en caractéristique 0.

Cohomologie de Čech (topologique, découpages) Isomorphe à la singulière par Mayer-Vietoris.

Cohomologie de de Rham Pour les variétés lisses sur un corps de caractéristique nulle : la cohomologie de de Rham des fonctions holomorphes est isomorphe (Dolbeaut) à celle des fonctions différentiables réelles, elle-même isomorphe (de Rham) à la singulière à coefficients dans $\mathbb{C}$ (NB : la formule de Stokes réalise la dualité entre l'homologie singulière et la cohomologie de de Rham).

Lemme de Poincaré : U un ouvert contractile de $\mathbb{R}^n$, alors la cohomologie du complexe de de Rham est concentrée en degré zéro et $H^0(U) = \mathbb{R}$.

Démonstration : on choisit une homotopie $h(0, x) = \cdot$, $h(1, x) = x$, et on définit

$$\int^{i+1} : \Omega^{i+1}(U) \longrightarrow \Omega^i(U), \omega \longmapsto \int_0^1 \omega(h(t, x)) dt.$$

Alors $(\int^i)$ est une homotopie entre le complexe R et Ω^i .

Exemple pour le groupe multiplicatif : le H_{dR}^1 est engendré par dt/t et le H_1^{sing} est engendré par le lacet exponentiel $\gamma : t \mapsto \exp 2i\pi t$. L'isomorphisme est donné par l'intégration le long de ce lacet, et n'est donc vrai que sur les complexes (pas sur $\mathbb{Q}$ en tout cas) puisque $\int_\gamma \omega = 2i\pi$.

Exemple pour une courbe elliptique $y^2 = f(x)$: Ω^1 est engendré par $\omega = dx/y$, et H^1 est de dimension 2, engendré par $\omega, x\omega$. (Là encore, les périodes du parallélogramme fondamental interviennent et l'isomorphisme est vrai uniquement sur $\mathbb{C}$).

Mais en caractéristique $p > 0$, ça se casse la figure : $d(x^{np}) = 0$ donc $H^1(\mathbb{A}^1)$ est de dimension infinie, ce qui est moche. Ou encore [Serre] : il existe une surface algébrique propre et lisse dont le groupe fondamental est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, donc avec $H_{\text{dR}}^1(X, k)$ de dimension 1 et $H_{\text{sing}}^1(\mathcal{X}(\mathbb{C})) = 0$.

Cohomologie de Hodge On note $\text{Fil}^i H_{\text{dR}}^m(X, K) = H^m(X, \Omega_{X/K}^{\geq i})$.

Cohomologie étale ℓ -adique En caractéristique nulle : $H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Z}_\ell) \simeq H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_\ell$. Ça donne le rang de la partie libre de $H^i(X(\mathbb{C}))$ et la ℓ -torsion, et le rang est fini et indépendant de ℓ .

Exemple : calcul de la cohomologie étale ℓ -adique d'une courbe elliptique. Un revêtement étale est un morphisme $Y \rightarrow E$, donc une isogénie $f : E' \rightarrow E$. On a alors $\mathcal{U} = (E' \rightarrow E)$, $f \times f = (E' \times_f E') \rightarrow E$ isomorphe à $E' \times \text{Ker } f$, ..., $f^n \simeq E' \times (\text{Ker } f)^{n-1}$. Soit M un groupe constant : alors $\underline{M}(f^n) = \mathcal{F}((\text{Ker } f)^{n-1}, M)$, et donc $\mathcal{C}^n(\mathcal{U}, M) = \mathcal{F}((\text{Ker } f)^{n-1}, M)$. On obtient donc le complexe

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{d^0} \mathcal{F}(\text{Ker } f, M) \xrightarrow{d^1} \mathcal{F}((\text{Ker } f)^2, M) \longrightarrow \dots$$

où $d^0(m) = (x, y) \mapsto m(x) - m(y) = 0$ puisque m est loc. constante (donc constante) ; $d^1(m)(u, v) = m(u + v) - m(u) - m(v)$ donc $H^0(\mathcal{U}, M) = M$, $H^0(\mathcal{U}, M) = \text{Hom}(\text{Ker } f, M)$.

On trouve donc : $H_{\text{ét}}^0(E, M) = M$, $H_{\text{ét}}^1(E, M) = 0$ si M est sans torsion, $H_{\text{ét}}^1(E, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = \text{Hom}(T_\ell(E), \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}) = T_\ell(E)^\vee$.

Du point de vue des fonctions zêta, c'est parfaitement utilisable (SEA).

Cohomologie étale p -adique ? Mais en caractéristique p , on sait juste que le rang est fini (pour X projectif lisse) et pas si c'est indépendant de ℓ . Et la théorie échoue pour $\ell = p$, donc on ne mesure pas la p -torsion de $H^i(X(\mathbb{C}))$.

Proposition 1. Soit X une variété de caractéristique p . Alors $H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Z}_p) = 0$ pour $i > \dim X$.

pour $\mathbb{Z}/p$. La suite de faisceaux $0 \rightarrow \underline{\mathbb{Z}/p} \rightarrow \mathbb{G}_a \xrightarrow{x^p - x} \mathbb{G}_a \rightarrow 0$ est exacte sur le site étale (car on peut résoudre étale-localement l'équation d'Artin-Schreier $x^p - x = b$, d'où une suite exacte $0 \rightarrow \underline{\mathbb{Z}/p}_X \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$. En prenant la cohomologie, on trouve

$$\dots \longrightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^{i+1}(X, \mathbb{Z}/p) \longrightarrow H^{i+1}(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow \dots$$

et le résultat s'en déduit (avec un peu de travail pour H^{d+1} : résoudre des équations semi-linéaires). $\triangleleft$

Théorème (Serre). *Il n'existe pas de cohomologie de Weil pour les variétés sur $\mathbb{Q}_p$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$ ou $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit E une courbe elliptique supersingulière et $A = \text{End } E$. Alors $A \otimes \mathbb{Q}$ est une algèbre de quaternions ramifiée en p et ∞ , i.e. $A \otimes \mathbb{R}$, $A \otimes \mathbb{Q}_p$ sont des algèbres de quaternions, et $A \otimes \mathbb{Q}_\ell$ est une algèbre de matrices. Puisque E a un relèvement en caractéristique nulle (il suffit de relever le j -invariant), $H^1(E)$ est un K -espace vectoriel de dimension 2, d'où une représentation unitaire $A \rightarrow \text{End } H^1(E) \simeq K^{2 \times 2}$. Puisque A est simple, c'est injectif, et donc $A \otimes K \simeq K^{2 \times 2}$, ce qui est contradictoire dans les cas $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{R}$. $\triangleleft$

On a en général

$$\dim H_{\text{Hodge}}^m = \bigoplus H^{m-i}(X, \Omega^i) \geq \dim H_{\text{dR}}^m \geq \dim H_\ell^m$$

Le premier est dû à la non-relevabilité de X sur W_2 (non-dégénérescence de la suite spectrale Hodge-de Rham), le deuxième à la p -torsion de la cohomologie cristalline.

Cohomologie de Witt Essai : regarder le faisceau $\mathcal{W}_n$ des vecteurs de Witt (c'est simplement $\mathcal{W}_n(U) = W_n(\mathcal{O}_U)$, ou encore $\mathcal{W}_n = \mathcal{O}_X^n$ muni des lois habituelles) et poser $H^*(X, \mathcal{W}) = \varprojlim H^*(X, \mathcal{W}_n)$. Ça peut être de dimension infinie... par exemple soit X la cubique cuspidale sur k parfait, P le point singulier, $\pi : X' \rightarrow X$ la normalisée. Soit $\mathcal{W}'_n = \pi_* \mathcal{W}_{n, X'}$, alors on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{W}_n \longrightarrow \mathcal{W}'_n \longrightarrow \mathcal{W}'_n / \mathcal{W}_n$$

où le quotient est concentré en P avec pour germe $W_n(k)$. On calcule alors $H^0(X, \mathcal{W}'_1 / \mathcal{W}_1) = H^1(X, \mathcal{W}_n) = k$ et par induction, $H^1(X, \mathcal{W}_n)$ est de longueur n .

On considère l'action du Frobenius sur $\mathcal{O}_{X'} : \varphi f = f^p$, donc en particulier ça envoie $\mathcal{O}_{X'}$ sur $\mathcal{O}_X$ (= fonctions de dérivée nulle en P), donc $\varphi|_{H^0(\mathcal{W}'_1 / \mathcal{W}_1)} = 0$. Par induction, il en est de même pour W_n , et donc $H^1(X, \mathcal{W}_n)$ est annulé par p . Par conséquent, $H^1(X, \mathcal{W}_n) = k^n$ et donc la limite projective est super moche.

Cohomologie infinitésimale Généralisation de la cohomologie de de Rham pour des variétés non lisses en caractéristique nulle. Cohomologie de de Rham sans utiliser de formes différentielles!

Si X n'est pas forcément lisse, il y a moyen de rattraper de Rham : soit $X \hookrightarrow Y$ un plongement dans Y lisse (penser à un voisinage tubulaire), $\mathcal{I}$ l'idéal du plongement, alors $\hat{Y}_X = X$ muni de $\varprojlim \mathcal{O}_Y / \mathcal{I}^n$ est la complétion formelle de Y le long de X . Mais ce n'est pas fonctoriel en X .

Principe : au lieu de considérer des différentielles (pénibles en caractéristique non nulle), on regarde un analogue des fonctions différentiables, c'est-à-dire un fibré vectoriel $F \rightarrow X$ tel que pour deux points « proches » $x, y \in X$, il existe une formule de Taylor reliant F_x à F_y , et de façon compatible si (x, y) , (x, z) , (y, z) sont proches.

Autrement dit : soit $N \subset X \times X$ l'ensemble des paires de points proches, $p_1, p_2 : N \rightarrow X$ les projections, alors F vérifie $p_1^* F \simeq p_2^* F$ (+ compatibilité).

Vue paramétrée de cette propriété : pour toute paire de morphismes $x_1, x_2 : B \rightarrow X$ proches, on veut avoir, pour tout $f \in F$, une relation entre $f \circ x_1$ et $f \circ x_2$, autrement dit un isomorphisme $x_1^* F = x_2^* F$ (plus des relations de compatibilité mais on ne va pas les détailler à chaque fois). Dire que les morphismes $x_1, x_2 : B \rightarrow X$ sont proches revient à dire que le produit $(x_1, x_2) : B \rightarrow X \times X$ se factorise à travers... quoi?

Comme points infiniment proches : soit $\mathcal{I}$ l'idéal de la diagonale de $X \times X$, $N^k X = \text{Spec } \mathcal{O}_{X \times X} / \mathcal{I}^k$, $N^\infty X = \varinjlim N^k X$. C'est l'épaississement nilpotent universel de X .

Se donner deux points proches (x_1, x_2) dans un ouvert U de X revient alors à se donner un morphisme $U \rightarrow N^\infty X$ tel que la composée $U \rightarrow N^\infty X \xrightarrow{\text{pr}_1} X$ soit l'injection naturelle $U \hookrightarrow X$, autrement dit un épaississement nilpotent $U \hookrightarrow T$ du morphisme $U \rightarrow X$. Un ensemble (faisceau) de fonctions régulières sur U est alors un foncteur qui à un tel $U \hookrightarrow T$ associe $F(U)$, avec des relations de compatibilité...

On vient ainsi de définir la *site infinitésimale* de X (c'est-à-dire de ne rien faire, ou presque...) $(X/\mathbb{C})_{\text{inf}}$:

- ses objets sont les épaississements (pro-)nilpotents des ouverts de X : $U \hookrightarrow T$ (i.e. immersion fermée dont l'idéal de définition est (topologiquement) nilpotent),
- ses morphismes sont les carrés auxquels on pense,
- et les recouvrements sont les Zariski-recouvrements de X par les ouverts U_i .

Si X est lisse et de caractéristique nulle, on dispose alors du lemme de Poincaré formel :

$$H^q(\Omega_{X/S}^* \otimes \mathcal{O}_{N^\infty X}) = \begin{cases} \mathcal{O}_X, & q = 0; \\ 0, & q \geq 1. \end{cases}$$

Théorème (Grothendieck). (i) Soit X lisse sur S de caractéristique nulle. Alors il existe un isomorphisme canonique $H_{\text{inf}}^*(X/S, \mathcal{O}_X) = H_{\text{dR}}^*(X/S)$ (ça calcule bien la cohomologie de De Rham si X est lisse).

(ii) Soit $X \hookrightarrow Y$ une immersion fermée, Y lisse, alors $H_{\text{inf}}^*(X/S) = H^*(\widehat{Y}_X, \Omega_{\widehat{Y}_X}^*)$, où $\widehat{Y}_X$ est la complétion formelle de Y le long de X (ça calcule la cohomologie d'un voisinage tubulaire de X même s'il n'est pas lisse).

(iii) Soit X'/S' lisse, $S \hookrightarrow S'$ un épaissement nilpotent, $X = X' \times_{S'} S$. Alors $H^*((X/S)_{\text{inf}}, \mathcal{O}_X) = H^*(X'/S')$ (changement de base).

Réf. : [Grothendieck, exposé 9/10] 40 pages d'abstract nonsense...

En caractéristique p [Ogus] : la cohomologie infinitésimale est la cohomologie étale à coefficients dans $W(k)$, donc une mauvaise cohomologie.

2 En caractéristique p : cohomologie cristalline

2.1 Formules de Taylor et puissances divisées

Remarques sur le site infinitésimal en caractéristique p :

- (i) $\text{Spec } k \rightarrow \text{Spec } W_n(k)$ est un épaissement nilpotent ;
- (ii) pas d'intégrabilité locale des formes différentielles (par exemple $x^{p-1}dx$).

Il existe encore une formule de Taylor en caractéristique p , mais certains termes s'annulent. On considère à présent les fonctions régulières f avec la donnée suivante :

- une dérivation D sur l'ensemble des fonctions régulières,
- un ensemble I d'éléments infinitésimaux ε ,
- des coefficients de Taylor $\gamma_n(\varepsilon)$,
- une formule de Taylor

$$f(x + \varepsilon) = \sum D^n(f)(x) \gamma_n(\varepsilon).$$

La dérivation D et les coefficients de Taylor $\gamma_n(\varepsilon)$ doivent vérifier les égalités suivantes :

- (i.i) 1 est régulière et $D(1) = 0$, donc $1(x + \varepsilon) = 1 = \gamma_0(\varepsilon)$, soit $\gamma_0 = 1$;
- (i.ii) de même, x est régulière et $D(x) = 1$, donc $x + \varepsilon = x + \gamma_1(\varepsilon)$, soit $\gamma_1 = \text{Id}$;
- (i.iii) si f est régulière et x, y sont infinitésimalement proches, alors $f(x), f(y)$ le sont aussi, donc $\gamma_n(\varepsilon)$ est infinitésimal pour $n \geq 1$;
- (ii) en développant $f(x + \varepsilon + \eta) : \varepsilon + \eta$ est infinitésimal et $\gamma_n(\varepsilon + \eta) = \sum_{i+j=n} \gamma_i(\varepsilon) \gamma_j(\eta)$;
- (iii) en développant $f(x + a\varepsilon) : a\varepsilon$ est infinitésimal et $\gamma_n(a\varepsilon) = a^n \gamma_n(\varepsilon)$;
- (iv) si f, g sont régulières, alors fg l'est et $D(fg) = fD(g) + D(f)g$: on obtient $\gamma_m \cdot \gamma_n = \frac{(m+n)!}{m!n!} \gamma_{m+n}$;
- (v) si f, g sont régulières, alors $f \circ g$ l'est et $D(f \circ g) = D(f) \circ gD(g)$: on obtient $\gamma_m \circ \gamma_n = \frac{(mn)!}{m!n!} \gamma_{mn}$.

Anneaux à puissances divisées : ce sont les (A, I, γ) , où A est un anneau, I un idéal de A , et $\gamma_n : I \rightarrow A$ (sauf $\gamma_0 = \text{Id}$) vérifient les axiomes ci-dessus. (On demande éventuellement à I d'être topologiquement nilpotent).

Ça impose en particulier (iii) : $n! \gamma_n(x) = x^n$, et donc si A est une $\mathbb{Q}$ -algèbre : $\gamma_n(x) = x^n/n!$, donc rien de neuf dans ce cas.

Si A est un anneau de valuation discrète d'inégale caractéristique et d'indice de ramification e , alors il existe une PD-structure sur $\mathfrak{m}_A$ si et seulement si $e \leq p-1$ (exercice facile). En particulier c'est vrai pour $W(R)$ avec R de caractéristique p , ce qui permet de définir par quotient une PD-structure canonique sur $W_n(R)$.

Plein d'autres sorites (construction d'objets universels, etc.) qu'on passe sous silence pour l'instant.

Exemple amusant :

$$\exp : I \longrightarrow 1 + I, x \longmapsto \sum \gamma_n(x), \quad \log : 1 + I \longrightarrow I, x \longmapsto \sum \pm(n-1)! \gamma_n(x)$$

sont des isomorphismes de groupe inverses l'un de l'autre.

Remarque idiote : si A est tué par un entier $m \in \mathbb{Z}$, alors pour tout $x \in I$, $x^m = m! \gamma_m(x) = 0$, donc I est un idéal nilpotent.

2.2 Le site cristallin

On note $A\langle t \rangle =$ l'algèbre formellement engendrée sur A par les $\gamma_m(t)$ satisfaisant les relations ci-dessus.

Lemme (Lemme de Poincaré cristallin). *Soit A un anneau, alors le complexe de de Rham de $\mathbb{A}_A^n/A$ à coefficients dans l'algèbre PD universelle $A\langle t_1, \dots, t_n \rangle$, est une résolution injective de A , avec la connexion naturelle définie par $D(\gamma_m(t_i)) = \gamma_{m-1}(t_i) \otimes dt_i$.*

Autrement dit : la suite longue (mais finie)

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A\langle t_1, \dots, t_n \rangle \xrightarrow{D} \bigoplus A\langle t \rangle dt_i \xrightarrow{D} \bigoplus A\langle t \rangle dt_i \wedge dt_j \dots$$

est exacte.

Démonstration. En dimension 1, il suffit de vérifier que la suite courte

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A\langle t \rangle \xrightarrow{D} A\langle t \rangle dt \longrightarrow 0$$

est exacte, ce qui est évident.

Pour étendre de la dimension n à la dimension $n+1$: soit ω une forme fermée : on l'écrit $\omega = \omega' dt_n + \omega''$, et on note $d = d' + \frac{\partial}{\partial t_n} dt_n \dots$ autrement dit, on étend à $\mathbb{A}^n$ une homotopie sur $\mathbb{A}^{n-1}$ et on fait chuter la dimension. $\triangleleft$

On considère donc un schéma X/S , et on suppose S muni de puissances divisées (en général $S = W_n(k)$ avec les PD standard). Le site cristallin $(X/S)_{\text{cris}}$ est l'ensemble des paires $U \hookrightarrow T$ où U est un ouvert de X et $U \hookrightarrow T$ est un épaissement infinitésimal à puissances divisées (i.e. il existe des puissances divisées γ_n sur l'idéal de définition de $U \hookrightarrow T$).

Propriétés :

Cohomologie de Weil C'est une cohomologie de Weil pour les schémas propres et lisses sur k .

Comparaison avec de Rham (mod p) On a $H_{\text{cris}}^*(X/W) \otimes_W k \simeq H_{\text{dR}}^*(X, k)$.

Comparaison avec de Rham (caractéristique zéro) Soit $\mathcal{X}$ un relèvement propre et lisse de X (s'il existe...).

Alors il existe un isomorphisme canonique $H_{\text{cris}}^*(X/W) \simeq H_{\text{dR}}^*(\mathcal{X}/W)$. (En particulier, $H_{\text{dR}}^*(\mathcal{X}/W)$ ne dépend que de $\mathcal{X}$ modulo p).

Frobenius Par fonctorialité, $F : X \rightarrow X$ induit $\varphi : H_{\text{cris}}^*(X/W) \rightarrow H_{\text{cris}}^*(X/W)$ qui est une isogénie (i.e. bijective après $\otimes \mathbb{Q}$).

Cristal Par conséquent, $H_{\text{cris}}^*(X/W)/\text{torsion}$ est un cristal, i.e. un W -module libre de type fini équipé de φ semi-linéaire et de rang maximal. C'est classifié [Dieudonné-Manin ; cf. Katz] par le polygone de Newton de φ .

Polygones de Newton et de Hodge Le polygone de Newton de φ est au-dessus du polygone de Hodge, donné par les dimensions de $H^{m-i}(X, \Omega^i)$ (conjecture de Katz, prouvée par Mazur-Ogus). De plus, dans les cas sympathiques, les deux polygones aboutissent au même point.

Variétés ordinaires Le polygone de Newton monte par spécialisation.

2.3 Le complexe de de Rham-Witt

C'est un outil pour calculer la cohomologie cristalline de façon effective.

« rappel » sur le complexe de de Rham : $\Omega_X^n = m$ -formes différentielles, c'est localement $\bigwedge^n \Omega_X^1$.

On construit un complexe double contenant à la fois les formes différentielles et les vecteurs de Witt. Il suffit d'expliquer comment on dérive un vecteur de Witt, et ceux-ci sont engendrés par les vecteurs de longueur 1 (isomorphes aux éléments de $\mathcal{O}_X$ par le représentant de Teichmüller) et le décalage $V : W_{m-1} \rightarrow W_m$.

Proposition 2. *Il existe un unique système projectif d'algèbres différentielles graduées $W_m \Omega_X^n$ tel que $W_1 \Omega_X^n = \Omega_X^n$, $W_m \Omega^0 X = W_m \mathcal{O}_X$, muni d'applications $V : W_{m-1} \Omega_X^n \rightarrow W_m \Omega^n X$, $F : W_m \rightarrow W_{m-1}$, $d : W_m \Omega^{n-1} X \rightarrow W_m \Omega^n X$, tel que*

$$(i) \quad FV = VF = p, \quad FdV = d, \quad Fd[x] = [x]^{p-1}d[x];$$

$$(ii) \quad F(xy) = F(x)F(y), \quad V(F(x)y) = xV(y);$$

Construction : des relations ci-dessus on déduit (exercice) les relations entre V et d :

$$(iii) \quad V(x dy) = V(xF(dVy)) = V(x) \cdot d(Vy);$$

$$(iv) \quad pdV = VF dV = Vd;$$

$$(v) \quad V(d[x]/[x]) = d[x]/[x];$$

$$(vi) \quad (d[x])V(y) = V([x]^{p-1}d[x]y).$$

Le complexe $W_m \Omega_X^n$ est essentiellement construit par générateurs et relations entre V , d et $[\cdot]$.

On montre ensuite l'existence d'un unique Frobenius $F : W_m \Omega^n \rightarrow W_{m-1} \Omega^n$ satisfaisant les relations nécessaires. On vérifie alors $F = R \circ \varphi$ sur $W_m \mathcal{O}_X$ où φ est le Frobenius de fonctorialité et R est la projection $W_m \rightarrow W_{m-1}$.

Cas particulier (exemple) : l'espace affine. On note

$$A = k[x_1, \dots, x_r], \quad B = W(k)[x_1, \dots, x_r], \quad C = \text{Frac } W(k)[x_1^{p^{-\infty}}, \dots, x_r^{p^{-\infty}}].$$

On vérifie alors que $\Omega_{C/W(k)}^n = \bigoplus C d \log x_{i_1} \wedge \dots \wedge d \log x_{i_n}$ et on note E^n l'ensemble des formes ω telles que ω et $d\omega$ soient à coefficients entiers. On munit les E^n d'opérateurs F et V définis par

$$F(f(\underline{x}) d \log \underline{x}) = f(\underline{x}^p) d \log \underline{x}, \quad V(f(\underline{x}) d \log \underline{x}) = p f(\underline{x}^{1/p}) d \log \underline{x}.$$

Proposition 3. *On a un isomorphisme canonique $W_m \Omega_A^n = E^n / (V^m E^n + dV^m E^{n-1})$.*

Théorème 4 (Illusie). *Soit X/k un schéma lisse. Alors $H_{\text{cris}}^*(X/W_m)$ est canoniquement isomorphe à l'hypercohomologie du complexe $W_m \Omega_X^*$, de façon compatible à l'action de Frobenius.*

Plus précisément : $H^{m-i}(X, W \Omega^i)$ équipé de $p^i F$ décrit la partie à pentes dans $[i, i+1[$ de $H^m(X/W)$.

Exemple incomplet : calcul de la cohomologie cristalline de $\mathbb{P}_k^1$, k parfait de caractéristique p . On utilise le recouvrement standard de $\mathbb{P}^1$ par deux ouverts isomorphes à $\mathbb{A}^1$ et dont l'intersection est $\mathbb{G}m$. On a alors le double complexe

$$\begin{array}{ccccc} W_m \Omega^0(\mathbb{P}^1) & \longrightarrow & W_m \Omega^0(\mathbb{A}^1) \oplus W_m \Omega^0(\mathbb{A}^1) & \longrightarrow & W_m \Omega^0(\mathbb{G}m) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ W_m \Omega^1(\mathbb{P}^1) & \longrightarrow & W_m \Omega^1(\mathbb{A}^1) \oplus W_m \Omega^1(\mathbb{A}^1) & \longrightarrow & W_m \Omega^1(\mathbb{G}m) \end{array}$$

3 Comparaison

3.1 Hodge-Tate

[Faltings] Pour X propre et lisse sur K , il existe un isomorphisme naturel, $\mathcal{G}_K$ -équivariant

$$\bigoplus H^{m-i}(X_K, \Omega^i) \otimes_K C(-i) \longrightarrow H^m(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} C.$$

Autrement dit, $B_{\text{HT}} = \bigoplus C(i)$ satisfait

$$\bigoplus H^{m-i}(X_K, \Omega^i) \otimes B_{\text{HT}} = H^m(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p) \otimes B_{\text{HT}}$$

et on retrouve la cohomologie de Hodge par le gradué de

$$H^{m-i}(X, \Omega^i) = (B_{\text{HT}} \otimes H^m(X, \mathbb{Q}_p))^{\mathcal{G}_K}.$$

3.2 De de Rham

Soit X propre et lisse sur K . Alors les espaces vectoriels $H_{\text{ét}}^i(X \otimes \overline{K}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathbb{C}_p$ et $H_{\text{dR}}^i(X/K) \otimes_K \mathbb{C}_p$ sont de même dimension sur $\mathbb{C}_p$, donc isomorphes. Mais il n'y a pas d'isomorphisme canonique (càd fonctoriel et Galois-équivariant).

Par exemple pour le groupe multiplicatif : la différentielle invariante est dt/t . On refait le calcul ci-dessus de façon compatible aux p -adiques : ce qui remplace le lacet exponentiel est le module de Tate $\mathbb{Z}_p(1)$, engendré par un élément $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ où $\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n$ et $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 \neq 1$. On a alors

$$\int_1^\varepsilon dt/t = p^n \int_1^{\varepsilon_n} dt/t = p^n \log \varepsilon_n = 0$$

pour toute définition raisonnable de l'intégrale p -adique. Il manque donc un analogue p -adique de $\log \varepsilon = 2i\pi$, i.e. un élément sur lequel le groupe de Galois agit par le caractère cyclotomique, soit $g \cdot \log \varepsilon = \chi(g) \log \varepsilon$. (Ça existe par exemple dans l'anneau B_{HT} par construction).

[gros passage passé sous silence] Il existe un anneau B_{dR} qui sert exactement à ça : c'est un anneau de valuation discrète dont le corps résiduel est $\mathbb{C}_p$ et le gradué est B_{HT} ; il est équipé d'une action de Galois et $B_{\text{dR}}^{\mathcal{G}_K} = K$; il contient un élément $\log \varepsilon$ et $t = (\log \varepsilon) - 1$ est une uniformisante.

Théorème (Faltings). *Soit X propre et lisse sur K . Il existe un isomorphisme canonique*

$$H_{\text{ét}}^i(X \otimes \overline{K}, \mathbb{Q}_p) \otimes B_{\text{dR}} = H_{\text{dR}}^i(X/K) \otimes_K B_{\text{dR}}.$$

(compatible à l'action de Galois sur la cohomologie étale et les B_{dR} qui interviennent ; à la filtration sur les B_{dR} et la filtration de Hodge sur la cohomologie de de Rham ; avec la dualité de Poincaré, les classes de Chern etc.)

En particulier, ça prouve le théorème Hodge-Tate (il suffit de tensoriser par B_{HT}).

On peut l'utiliser pour retrouver $H_{\text{ét}}^i$ à partir de H_{dR}^i : il suffit d'appliquer $\text{Gr}^0(- \otimes_K B_{\text{dR}})$. Dans l'autre sens : $(- \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{dR}})^{\mathcal{G}_K}$.

3.3 Cristalline

Soit X propre et lisse sur K , à bonne réduction Y sur k . Existe-t-il un moyen de relier $H_{\text{cris}}^i(Y/W)$ et $H_{\text{ét}}^i(X, \mathbb{Q}_p)$? La question a en fait été posée avant même que H_{cris}^i soit défini, dans le cas des variétés abéliennes : dans ce cas, la cohomologie étale est donnée par le module de Tate de X (c'est un $\mathbb{Q}_p$ -ev de dimension deux + une action de Galois) et la cohomologie cristalline est donnée par le module de Dieudonné associé au groupe p -divisible de Y (c'est un $\mathbb{Z}_p$ -module libre de rang deux + une filtration à deux crans + un Frobenius semi-linéaire). C'est la question du « foncteur mystérieux » de Grothendieck : généraliser aux var. de bonne réduction le résultat valable pour les var. abéliennes ? La moitié de la réponse est fournie par la construction de la cohomologie cristalline, l'autre par l'isomorphisme de périodes.

Fontaine a construit un anneau B_{cris} muni d'un Frobenius semi-linéaire, d'une filtration (en fait $B_{\text{cris}} \otimes_{K_0} K \subset B_{\text{dR}}$ et c'est la filtration induite) et d'une action de Galois telle que $B_{\text{cris}}^{\mathcal{G}_K} = K_0$ (partie non ramifiée de K), tel que $\text{Fil}^0 B_{\text{cris}}^{\varphi=1} = \mathbb{Q}_p$. On a alors l'isomorphisme suivant :

Théorème (Fontaine, Messing, Kato, Tsuji). *Il existe un isomorphisme fonctoriel compatible à tout*

$$H_{\text{ét}}^i(X \otimes \overline{K}, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}} = H_{\text{cris}}^i(Y/K_0) \otimes_{K_0} B_{\text{cris}}$$

En particulier, on peut retrouver H_{cris}^i à partir de $H_{\text{ét}}^i$ en appliquant $(- \otimes_{\mathbb{Q}_p} B_{\text{cris}})^{\mathcal{G}_K}$ et réciproquement avec $(- \otimes_{K_0} B_{\text{cris}})^{\varphi=1} \cap \text{Fil}^0(- \otimes_{K_0} B_{\text{cris}} \otimes_{K_0} K)$.

Note sur la construction de B_{cris} : en fait $B_{\text{cris}} = B_{\text{cris}}^+[1/t]$ où

$$B_{\text{cris}}^+ = H_{\text{cris}}^0(\text{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{K}/p})/W).$$

3.4 Semi-stable

C'est une extension de la comparaison cristalline au cas où X a une réduction semi-stable (i.e. la fibre spéciale est un diviseur à croisements normaux). Comparaison entre la cohomologie log-cristalline et la cohomologie étale. L'anneau de périodes idoine est B_{st} , qui contient B_{cris} .